複合仮説に対する尤度比規準の漸近分布について (多変量統計解析)

早川, 毅

数理解析研究所講究録
231巻 1975年 58-68

複合仮説に対する尤度比規準の漸近分布について

統計数理研　早川　毅

序．　複合仮説に対する尤度比規準の局所対立仮説のもとでの漸近分布をしらべ，対立仮説が仮説に収束する速度によりその極限分布の異なることを示す．

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を m 次元 random sample とし，その連続な密度関数を $f(\underline{x}|\underline{\theta})$ とする．$\underline{\theta}'=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p)$ は未知母数とする．複合仮説Hと対立仮説Kを

$$H:\ \underline{\theta}_2 = \underline{\theta}_{20}, \qquad K:\ \underline{\theta}_2 \neq \underline{\theta}_{20}$$

とする．$\underline{\theta}'=(\underline{\theta}_1', \underline{\theta}_2')$, $\underline{\theta}_1'=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q)$, $\underline{\theta}_2'=(\theta_{q+1}, \cdots, \theta_p)$, $\underline{\theta}_{20}'=(\theta_{q+1\,0}, \cdots, \theta_{p0})$ (Specified)．尤度比規準は仮説Hのもとで極限分布が自由度 $(p-q)$ の中心 χ^2－分布に従うことは well known である．

対立仮説の列 $\{K_n\}$ を

$$K_n:\ \underline{\theta}_2 = \underline{\theta}_{20} + \underline{\epsilon}/\psi(n),$$

$\underline{\epsilon}'=(\epsilon_{g+1},\cdots,\epsilon_p)$, $\psi(n)\to\infty$ as $n\to\infty$ とする. ここでは

(i) $\psi(n)=n^{1/2}$, (ii) $\psi(n)=n^{3/4}$, (iii) $\psi(n)=n^{1/4}$

の場合について考える.

1. $\psi(n)=n^{1/2}$ の場合.

仮説Hの対立仮説Kに対する尤度比規準を

$$\lambda=\prod_{\alpha=1}^{n}\frac{f(x_\alpha\mid\tilde{\underline{\theta}}_1,\underline{\theta}_{20})}{f(x_\alpha\mid\hat{\underline{\theta}}_1,\hat{\underline{\theta}}_2)}$$

とおく. ここで $\tilde{\underline{\theta}}_1$ はHのもとでの $\underline{\theta}_1$ の最尤推定量(m.l.e.)とし, $\hat{\underline{\theta}}'=(\hat{\underline{\theta}}_1',\hat{\underline{\theta}}_2')$ はKのもとでの m.l.e. とする. $\hat{\underline{\theta}}$, $\tilde{\underline{\theta}}_1$ は各々十分大きい n に対して一意的であるとする. $L(\underline{\theta})=\sum_{\alpha=1}^{n}\log f(x_\alpha\mid\underline{\theta})$ とすると,

$$S=-2\log\lambda=2\{L(\hat{\underline{\theta}})-L(\tilde{\underline{\theta}}_1,\underline{\theta}_{20})\}$$

となる.

次の様な記号を用いる.

(i) 特に指定しなければ, $i,j,k,\cdots$ は1から g までを動き, $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ は $g+1,\cdots,p$ の間を動く.

i.e., $\sum_i\theta_i=\sum_{i=1}^{g}\theta_i$, $\sum_\alpha\theta_\alpha=\sum_{\alpha=g+1}^{p}\theta_\alpha$. etc.

(ii) $L(\underline{\theta})$ は $\underline{\theta}$-微分に関して三次まで正則とする.

(iii) 関数の $\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}$ に於ける値には"^"をつける.

(iv) 関数の $\theta_1 = \tilde{\theta}_1,\ \theta_2 = \theta_{20}$ に於ける値には "~" をつける.

(v) 関数の $\theta_1 = \theta_1,\ \theta_2 = \theta_{20}$ に於ける値には "+" をつける.

(vi) $v_i = \sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta_i),\ i = 1, 2, \cdots, p.$ $\quad \underline{v}' = (v_1, v_2, \cdots, v_p).$

$\epsilon_\alpha = \psi(n)(\theta_\alpha - \theta_{\alpha 0}),\ \alpha = q+1, \cdots, p.$ $\quad \underline{\epsilon}' = (\epsilon_{q+1}, \cdots, \epsilon_p).$

$w_i = \sqrt{n}(\tilde{\theta}_i - \theta_i),\ i = 1, 2, \cdots, q.$ $\quad \underline{w}' = (w_1, w_2, \cdots, w_q).$

(vii) $$y_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial L}{\partial \theta_i},\quad y_{ij} = \frac{1}{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_i\partial\theta_j},\quad y_{ijk} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{\partial^3 L}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}.$$

$K_{ij} = E(y_{ij}),\quad K_{i,j} = E(y_i y_j).$

$K_{ijk} = \sqrt{n}\, E(y_{ijk}),\quad K_{i,jk} = \sqrt{n}\, E(y_i y_{jk}),\quad K_{i,j,k} = \sqrt{n}\, E(y_i y_j y_k).$

$i, j, k = 1, 2, \cdots, p.$

ここで,

$$\underline{y}' = (y_1, y_2, \cdots, y_p),\qquad Y = (y_{ij}) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array} \\ \begin{array}{cc} q \quad & p-q \end{array} & \end{array},$$

$$K = (K_{ij}) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = -E(Y).$$

(viii) 三個の index をもつ量に対する和の記号.

$A_{p\times p}$, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}_{p\times 1}$. とする.

$K_{\cdots} \circ \underline{a} \circ \underline{b} \circ \underline{c} = \sum_{i,j,k=1}^{p} K_{ijk} a_i b_j c_k$ …… scalar

$K_{\cdots} \circ \underline{a} \circ \underline{b} = \sum_{j,k=1}^{p} K_{ijk} a_j b_k$ … (第 i 成分を左式に持つ p-成分ベクトル).

$K_{\cdots} \circ \underline{a} = \sum_{k=1}^{p} K_{ijk} a_k$ … ((i,j) 成分を左式に持つ $p\times p$ 行列).

$$A K_{\cdots} \circ \underline{a} \circ \underline{b} = A(K_{\cdots} \circ \underline{a} \circ \underline{b}) \cdots\cdots$$（通常の積演算は"o"-演算の後に行う）

$\underline{a}_1' = (a_1, \ldots, a_g)$, $\underline{a}_2 = (a_{g+1}, \ldots, a_p)$, etc, $A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} g \\ p-g \end{array} \\ \begin{array}{cc} g & p-g \end{array} & \end{array}$ とするとき，

$$K_{111} \circ \underline{a}_1 \circ \underline{b}_1 \circ \underline{c}_1 = \sum_{i,j,k=1}^{g} K_{ijk}\, a_i b_j c_k.$$

$$K_{121} \circ \underline{a}_1 \circ \underline{b}_2 \circ \underline{c}_1 = \sum_{i,j=1}^{g} \sum_{\alpha=g+1}^{p} K_{i\alpha j}\, a_i b_\alpha c_j$$

$$K_{212} \circ A_{21} \circ \underline{a}_2 = \sum_{i=1}^{g} \sum_{\alpha,\beta=g+1}^{p} K_{\alpha i \beta}\, a_{\alpha i}\, a_\beta \qquad \text{etc.}$$

さて，$L(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_{20})$ を $\underline{\theta}_1 = \hat{\underline{\theta}}_1$, $\underline{\theta}_2 = \hat{\underline{\theta}}_2$（$\underline{\theta}$ の m.l.e.）で Taylor 展開し，

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{w} \\ -\underline{\epsilon} \end{bmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix}$$

とおき，

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} + y_{ij\ell} v_\ell + y_{ij\alpha} v_\alpha + o_p(1/\sqrt{n}), \quad i,j = 1,2,\cdots,p,\ \ell = 1,2,\cdots,g,\ \alpha = g+1,\cdots,p$$

$$\hat{y}_{ijk} = y_{ijk} + o_p(1/\sqrt{n}), \qquad i,j,k = 1,2,\cdots,p$$

を用いると，

$$2\log\lambda = (\underline{u}-\underline{v})' Y (\underline{u}-\underline{v})$$
$$+ \frac{1}{3} Y_{\cdots} \circ (\underline{u}-\underline{v}) \circ (\underline{u}-\underline{v}) \circ (\underline{u}-\underline{v}) + Y_{\cdots} \circ (\underline{u}-\underline{v}) \circ (\underline{u}-\underline{v}) \circ \underline{v}$$
$$+ o_p(1/\sqrt{n})$$

となる。

一方 $\underline{v}$ のみたす方程式は

$$\underline{0} = \hat{\underline{y}} = \underline{y} + Y\underline{v} + \frac{1}{2}Y_{\cdots}\circ\underline{v}\circ\underline{v} + o_p(1/\sqrt{n}).$$

これを $\underline{v}$ について解けば，

$$\underline{v} = -Y^{-1}\underline{y} - \frac{1}{2}Y^{-1}(Y_{\cdots}\circ Y^{-1}\underline{y}\circ Y^{-1}\underline{y}) + o_p(1/\sqrt{n})$$

となる．　また $\underline{w}$ に関する方程式は

$$\underline{0} = \tilde{\underline{y}}_1 = \underline{y}_1 + Y_{11}\underline{w} - Y_{12}\underline{\epsilon} + \frac{1}{2}Y_{1\cdot\cdot}\circ\underline{u}\circ\underline{u} + o_p(1/\sqrt{n})$$

であるから，

$$\begin{aligned}\underline{w} = & -Y_{11}^{-1}\underline{y}_1 + Y_{11}^{-1}Y_{12}\underline{\epsilon} \\ & -\frac{1}{2}Y_{11}^{-1}\Big\{Y_{111}\circ Y_{11}^{-1}(\underline{y}_1 - Y_{12}\underline{\epsilon})\circ Y_{11}^{-1}(\underline{y}_1 - Y_{12}\underline{\epsilon}) + Y_{112}\circ Y_{11}^{-1}(\underline{y}_1 - Y_{12}\underline{\epsilon})\circ\underline{\epsilon} \\ & \qquad + Y_{121}\circ\underline{\epsilon}\circ Y_{11}^{-1}(\underline{y}_1 - Y_{12}\underline{\epsilon}) + Y_{122}\circ\underline{\epsilon}\circ\underline{\epsilon}\Big\} + o_p(1/\sqrt{n}).\end{aligned}$$

これらの関係より，$\underline{u}$ と $\underline{y}$, Y, $Y_{\cdots}$ の関係は，

$$\underline{u} = -Z_0\underline{y} + \underline{\xi} - \frac{1}{2}Z_0\underline{g} + o_p(1/\sqrt{n}),$$

となり，

$$Z_0 = \begin{bmatrix} Y_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \underline{\xi} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{-1}Y_{12} \\ -I \end{bmatrix}\underline{\epsilon},\quad \underline{g} = \begin{bmatrix} Y_{1\cdot\cdot}\circ(Z_0\underline{y} - \underline{\xi})\circ(Z_0\underline{y} - \underline{\xi}) \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

である．特に $Z = Y^{-1} - Z_0$ とおくと，

$$ZYZ = Z,\quad ZYZ_0 = 0,\quad Z_0Y\underline{\xi} = \underline{0}$$

となる．

また y_{ijk} は，$\sqrt{n}\,y_{ijk} \longrightarrow \kappa_{ijk}$ in prob. であるから，

$$y_{ijk} = \kappa_{ijk}/\sqrt{n} + o_p(1/\sqrt{n})$$

としても，もとの式の order は $O_p(1/\sqrt{n})$ まで正しく表せる．

以上をまとめて,

$$
\begin{aligned}
S &= -2\log\lambda \\
&= -(Zy+\xi)'Y(Zy+\xi) \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{3}K_{\cdots}\circ(Zy+\xi)\circ(Zy+\xi)\circ(Zy+\xi)+K_{\cdots}\circ(Zy+\xi)\circ(Z_0y-\xi)\circ Y^{-1}y\right\} \\
&\quad + o_p(1/\sqrt{n}).
\end{aligned}
$$

となる.

S の Moment generating function を求めるには y, Y の同時密度関数に関する multivariate Edgeworth type 展開が必要となり,

Peers [1]により,

$$
f = f_0\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{6}(K_{,,,}\circ K^{-1}y\circ K^{-1}y\circ K^{-1}y-3K_{,,,}\circ K^{-1}\circ K^{-1}y) - K_{,,\cdot}\circ K^{-1}y\circ D\right\}\right]+o(1/\sqrt{n}),
$$

$$
f_0 = (2\pi)^{-p/2}|K|^{-1/2}\exp\{-y'K^{-1}y/2\}\prod_{i,j=1}^{p}\delta(y_{ij}-K_{ij}),
$$

$$
D = (d_{bc})_{p\times p},\quad d_{bc} = \delta'(y_{bc}-K_{bc})/\delta(y_{bc}-K_{bc}),
$$

$\delta(y_{bc}-K_{bc})$ は Dirac の δ-関数である.

これを用いて,

$$
\begin{aligned}
M(t) &= E[\exp(tS)] = \int\cdots\int\exp(tS)f\,dy\,dY + o(1/\sqrt{n}) \\
&= (1-2t)^{-(p-8)/2}\exp\{t\underline{\epsilon}'K_{22\cdot1}\underline{\epsilon}/(1-2t)\} \\
&\quad\cdot\left[1+\frac{(-1)}{\sqrt{n}}\left\{\frac{d}{6}K_{\cdots}\circ\underline{\epsilon}^*\circ\underline{\epsilon}^*\circ\underline{\epsilon}^*+\frac{d^2}{6}K_{,,,}\circ\underline{\epsilon}^*\circ\underline{\epsilon}^*\circ\underline{\epsilon}^*\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\frac{d}{2}(K_{\cdots}\circ A\circ\underline{\epsilon}^*+2K_{,,\cdot}\circ A\circ\underline{\epsilon}^*)\right\}+o(1/\sqrt{n})\right]
\end{aligned}
$$

となる. ここで,

$$
K_{22\cdot1} = K_{22}-K_{21}K_{11}^{-1}K_{12},\qquad d = 2t/(1-2t).
$$

$$\underline{\epsilon}^* = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} K_{12} \\ -I_{p-q} \end{bmatrix} \underline{\epsilon}, \qquad A = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である．　K_{ij}'s は $\underline{\theta} = \underline{\theta}$ における値であるので，仮説 H: $\underline{\theta}_2 = \underline{\theta}_{20}$ の近傍における状態を知るのに，各 K's を $\underline{\theta}_1 = \underline{\theta}_1$, $\underline{\theta}_2 = \underline{\theta}_{20}$ で Taylor 展開することにより，最終的に次式を得る．

$$M(t) = (1-2t)^{-(p-q)/2} \exp\{t\underline{\epsilon}' K_{22\cdot1}^{+} \underline{\epsilon}/(1-2t)\}$$
$$\cdot\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{a_2}{(1-2t)^2} + \frac{a_1}{1-2t} + a_0\right\} + o(1/\sqrt{n})\right]$$

ここで，

$$a_2 = -\frac{1}{6} K_{,,,,,,} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+}$$

$$a_1 = -\frac{1}{6}\{K_{\cdots}^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} - 2K_{,,,,,,}^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} + 3K_{,\cdot\cdot}^{+} \circ A^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+}$$
$$+ 6K_{,,\cdot\cdot}^{+} \circ A^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} + 3K_{2\cdot\cdot}^{+} \circ \underline{\epsilon} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} + 3K_{2,\cdot\cdot} \circ \underline{\epsilon} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+}\}$$

$$a_0 = -\frac{1}{6}\{K_{,,,,,,}^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} - K_{\cdots}^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} - 3K_{\cdots}^{+} \circ A^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+}$$
$$- 6K_{,,\cdot\cdot}^{+} \circ A \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} - 3K_{2\cdot\cdot}^{+} \circ \underline{\epsilon} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} - 3K_{2,\cdot\cdot}^{+} \circ \underline{\epsilon} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+} \circ (\underline{\epsilon}^*)^{+}\}$$

である．

よってこれを反転させることにより次の定理を得る．

［定理 1］．　仮説 H に $1/\sqrt{n}$ の速度で収束する局所対立仮説のもとでの尤度比規準の分布の漸近展開式は，

$$P\{-2\log\lambda \le x\} = P_f(\delta^2) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\alpha=0}^{2} a_\alpha P_{f+2\alpha}(\delta^2) + o(1/\sqrt{n}),$$

となり，$P_f(\delta^2) = P(\chi_f^2(\delta^2) \le x)$，　$\chi_f^2(\delta^2)$ は自由度 $f = p - q$ の non-central χ^2-変数で，その non-centrality parameter $\delta^2 = \frac{1}{2}\underline{\epsilon}' K_{22\cdot1}^{+} \underline{\epsilon}$ である．

特に $g=0$ とすると，仮説 H は単純仮説となり Peers によって得られたものになる．

$$P\{-2\log\lambda \le x\} = P_f(\delta^2)$$
$$+\frac{1}{6\sqrt{n}}\Big\{K^{+}_{\cdots}\circ\underline{\epsilon}\circ\underline{\epsilon}\circ\underline{\epsilon}\, P_{f+4}(\delta^2) + 3\,K^{+}_{\cdots}\circ\underline{\epsilon}\circ\underline{\epsilon}\circ\underline{\epsilon}\, P_{f+2}(\delta^2)$$
$$+K^{+}_{\cdots}\circ\underline{\epsilon}\circ\underline{\epsilon}\circ\underline{\epsilon}\, P_f(\delta^2)\Big\} + o(1/\sqrt{n}),$$

ここで $f=p$．（Peers の結果には誤りが有る）．

- $a_0 + a_1 + a_2 = 0$
- 複合仮説の場合には係数 a_0, a_1, a_2 が $\underline{\epsilon}$ に関して三次と一次の多項式であるが，単純仮説では三次の同次多項式になっている．

(例)　$x \sim N_m(\mu, \Sigma)$．　$X = [x_1, \cdots, x_N]_{m\times N}$ を標本行列とする．　このとき，

$H:\quad \Sigma = \Sigma_0$ (specified)

$K:\quad \Sigma \ne \Sigma_0$

を検定するとき，その尤度比規準は

$$\lambda = \left(\frac{e}{N}\right)^{Nm/2} |\Sigma_0^{-1}A|^{N/2}\, \mathrm{etr}(-\Sigma_0^{-1}A/2)$$

となり，

$$A = \sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha - \bar{x})(x_\alpha - \bar{x})', \qquad \bar{x} = \sum_{\alpha=1}^{N} x_\alpha / N.$$

このとき，局所対立仮説を

$$K_{\sqrt{N}}:\quad \Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_0^{1/2}\Theta\Sigma_0^{1/2}/\sqrt{N}$$

とするとき，定理より，

$$P\{-2\log\lambda \le x\} = P_f(\delta^2) + \frac{1}{\sqrt{N}}\left\{\frac{\mathrm{tr}\,\Theta^3}{6}\{P_{f+4}(\delta^2) - 3P_{f+2}(\delta^2) + 2P_f(\delta^2)\}\right.$$
$$\left. - \frac{\mathrm{tr}\,\Theta}{6}\{P_{f+2}(\delta^2) - P_f(\delta^2)\}\right\} + o(1/\sqrt{N})$$

となり，$\delta^2 = \mathrm{tr}\,\Theta^2/4$，$f = m(m+1)/2$ となる．

この結果は Sugiura [1973. A.S.] の結果と $\mathrm{tr}\,\Theta$ に関する項が異なる．Sugiura 氏は検定の不偏性を尤度比が持たないので，modified L.R.C. として

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{e}{n}\right)^{mn/2}|\Sigma_0^{-1}A|^{n/2}\,\mathrm{etr}(-\Sigma_0^{-1}A/2)$$

を用いている．

ここで次の仮説 H^* と対立仮説 K^* を考える．

$$H^*:\quad \Sigma = \Sigma_0,\quad \text{given } \mu = 0.$$

$$K^*:\quad \Sigma \ne \Sigma_0,\quad \text{given } \mu = 0.$$

このとき $n = N-1$ コの sample にもとづく L.R.C. は，

$$\lambda^* = \left(\frac{e}{n}\right)^{mn/2}|\Sigma_0^{-1}S|^{n/2}\,\mathrm{etr}(-\Sigma_0^{-1}S/2),\quad S = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha x_\alpha'$$

となり，λ^* と $\hat{\lambda}$ は同じ分布を持つ．正規母集団に対して仮説 H^* は複合仮説ではなく単純仮説であるから，$\hat{\lambda}$ の $K_{\sqrt{N}}$ のもとでの漸近分布は Peers の結果を用いて求められ，$1/\sqrt{N}$ の項で $\mathrm{tr}\,\Theta$ を含まぬ形となる．

2. $\psi(n)=n^{3/4}$, $n^{1/4}$ の場合.

$\psi(n)=n^{3/4}$ の場合には, Moment generating function は各 ϵ に対して, $\psi(n)=n^{1/2}$ の場合の M.G.f. で $\epsilon/\sqrt[4]{n}$ とおくことにより得られ,

$$M(t)=(1-2t)^{-(p-g)/2}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{n}}\epsilon' K^{+}_{22\cdot1}\epsilon\left\{\frac{1}{1-2t}-1\right\}+o(1/\sqrt{n})\right].$$

よって

[定理2] $K_{n^{1/4}}$: $\underline{\theta}_2=\underline{\theta}_{20}+\epsilon/\sqrt[4]{n}$ のもとで $-2\log\lambda$ は,

$$P(-2\log\lambda\leq x)=P_f+\frac{1}{2\sqrt{n}}\epsilon' K^{+}_{22\cdot1}\epsilon\{P_{f+2}-P_f\}+o(1/\sqrt{n}).$$

ここで $P_f=P(\chi_f^2\leq x)$. χ_f^2 は central χ^2-変数で f d.f. である. $f=p-g$.

$\psi(n)=n^{1/4}$ の場合には $S=-2\log\lambda$ は,

$$S=-\sqrt{n}\,\epsilon' Y_{22\cdot1}\epsilon-\sqrt[4]{n}\left\{2\underline{\xi}' y+\frac{1}{3}K_{\cdots}\circ\underline{\xi}\circ\underline{\xi}\circ\underline{\xi}\right\}+O_p(1)$$

と表現されるから,

$$\begin{aligned}S'=n^{-1/4}\Big\{S&-\sqrt{n}\,\epsilon' K^{+}_{22\cdot1}\epsilon\\&+\sqrt[4]{n}\Big\{\frac{1}{3}K^{+}_{\cdots}\circ(\epsilon^*)^{+}\circ(\epsilon^*)^{+}\circ(\epsilon^*)^{+}+K^{+}_{2\cdot\cdot}\circ\epsilon\circ(\epsilon^*)^{+}\circ(\epsilon^*)^{+}\\&\qquad+K^{+}_{2,\cdot\cdot}\circ\epsilon\circ(\epsilon^*)^{+}\circ(\epsilon^*)^{+}\Big\}\Big]\\&=-2\underline{\xi}' y-\sqrt[4]{n}\,\epsilon'(Y_{22\cdot1}+K^{+}_{22\cdot1})\epsilon+O_p(1)\end{aligned}$$

とすると, S' の Moment generating function の極限は $\exp\{2\epsilon' K^{+}_{22\cdot1}\epsilon t^2\}$ となることが示せる. よって次の定理を得る.

[定理3]　局所対立仮説 $K_{n^{1/4}}$: $\underline{\theta}_2 = \underline{\theta}_{20} + \underline{\epsilon}/\sqrt[4]{n}$ のもとで，
S'/λ は漸近的に平均 0，分散 1 の正規分布となる．
$\lambda^2 = 4\underline{\epsilon}' K_{22.1}^{+} \underline{\epsilon}$.

Reference

[1] Peers, H. W. (1971). "Likelihood ratio and associated test criteria," Biometrika. 58, 577–587

[2] Sugiura, N. (1973). "Asymptotic non-null distributions of the likelihood ratio criteria for covariance matrix under local alternatives." Ann. of Statist. 1. 718–728.

//